HÁSKÓLI ÍSLANDS

Reikniverkefni II

Sævar Öfjörð Magnússon

21. nóvember 2005

Kafli 1.4 Properties of Discrete-Time Systems

Basic Problems

Í þessum dæmum eru gefnir upp eiginlegar sem téð kerfi uppfyllir ekki, og eitt eða fleiri innmerki sem sýna greinilega fram á að kerfið uppfylli ekki gefna eiginleika. Fyrir hvert kerfi þarf að skilgreina MATLAB vigra til þess að tákna innmerki og útmerki. Síðan gerum við gröf með þessum merkjum og færum rök fyrir því hvernig þessi gröf geta sýnt hvernig kerfið uppfyllir ekki þessa eiginleika.

Liður (a)

Dæmi

Kerfið $y[n] = \sin((\pi/2)x[n])$ er ekki línulegt. Notum merkin $x_1[n] = \delta[n]$ og $x_2[n] = 2\delta[n]$ til þess að sýna fram á að kerfið sé ekki línulegt.

Lausn

Höfum $y[n] = \sin((\pi/2)x[n])$, $x_1[n] = \delta[n]$ og $x_2[n] = 2\delta[n]$. Skilgreinum

$$\begin{aligned} y_1[n] &\triangleq \sin((\pi/2)x_1[n]), \\ y_2[n] &\triangleq \sin((\pi/2)x_2[n]). \end{aligned}$$

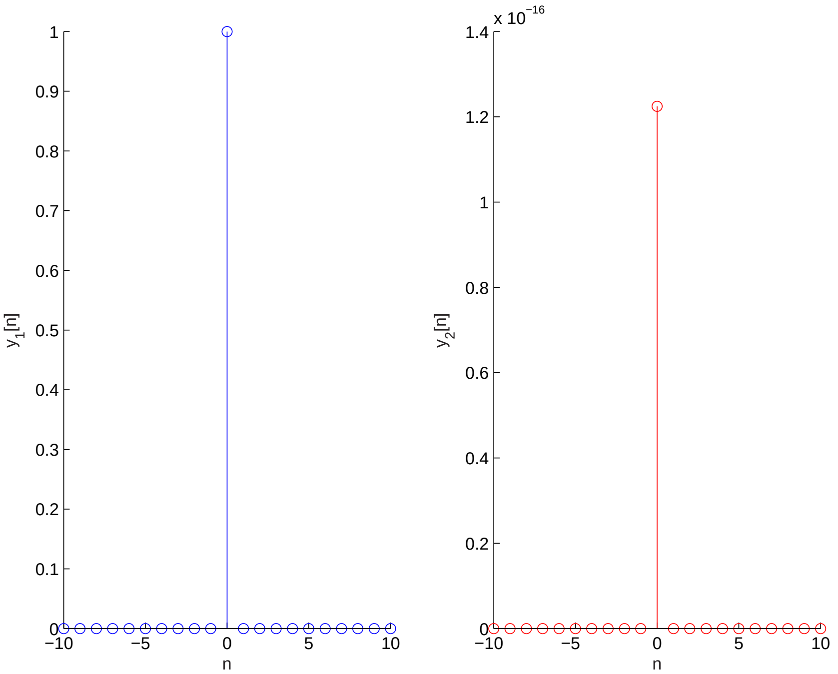
Til þess að $y[n]$ sé línulegt þarf innmerkið $ax_1[n] + bx_2[n]$ að gefa útmerkið $ay_1[n] + by_2[n]$ Þar sem a og b eru einhverjir fastir skalar. Við getum leitt það út að fallið sé ólínulegt:

$$\begin{aligned} y_3[n] &\triangleq \sin\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)(ax_1[n] + bx_2[n])\right], \\ &= \sin\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)ax_1[n]\right]\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)bx_2[n]\right] + \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)ax_1[n]\right]\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)bx_2[n]\right] \end{aligned}$$

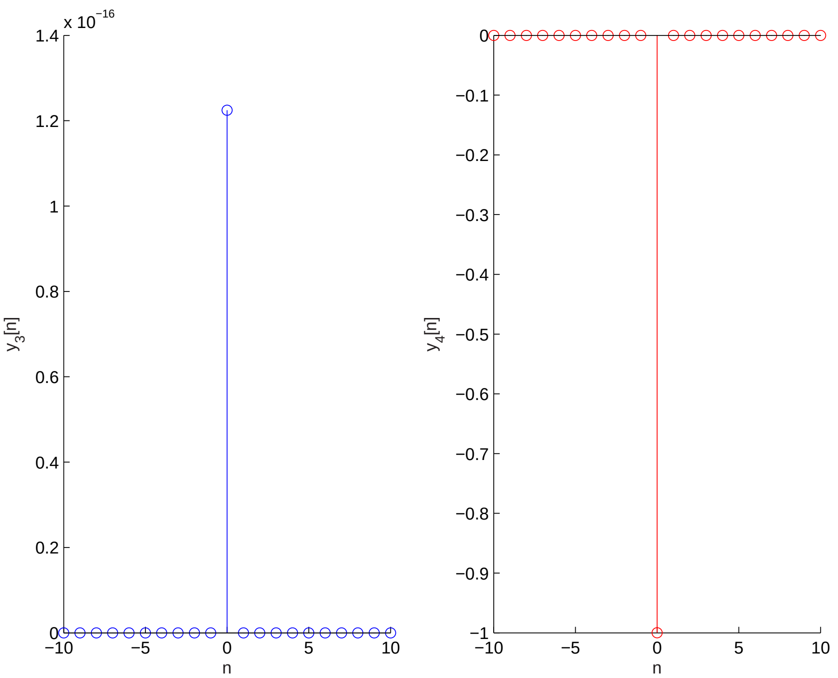
Við vitum að

$$\begin{aligned} ay_1[n] + by_2[n] &= a\sin((\pi/2)x_1[n]) + b\sin((\pi/2)x_2[n]) \\ &\Rightarrow y_3[n] \neq ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

Merkið er því greinilega ekki línulegt. Þetta getum við einnig séð í MATLAB. Á fyrra grafinu á næstu síðu teiknum við upp annars vegar $y_1[n]$ og hins vegar $y_2[n]$. Ef við lítum síðan á næsta graf þar sem við teiknum annars vegar $y_3[n]$ (sama og $y[n]$ með $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$) og hins vegar $ay_1[n] + by_2[n]$ sjáum við að gröfin eru mjög ólík (Við látum a og b vera einhverja fasta, þá sömu í báðum gröfum). Ef merkið væri línulegt ættum við að fá tvö nákvæmlega eins gröf.



Mynd 1: Merkið $y[n]$ fyrir $x[n] = x_1[n]$ annars vegar og $x[n] = x_2[n]$ hins vegar.



Mynd 2: Annars vegar merkið $y_3[n]$ fyrir $x[n] = ax_1[n]+bx_2[n]$ og hins vegar $ay_1[n]+by_2[n]$.

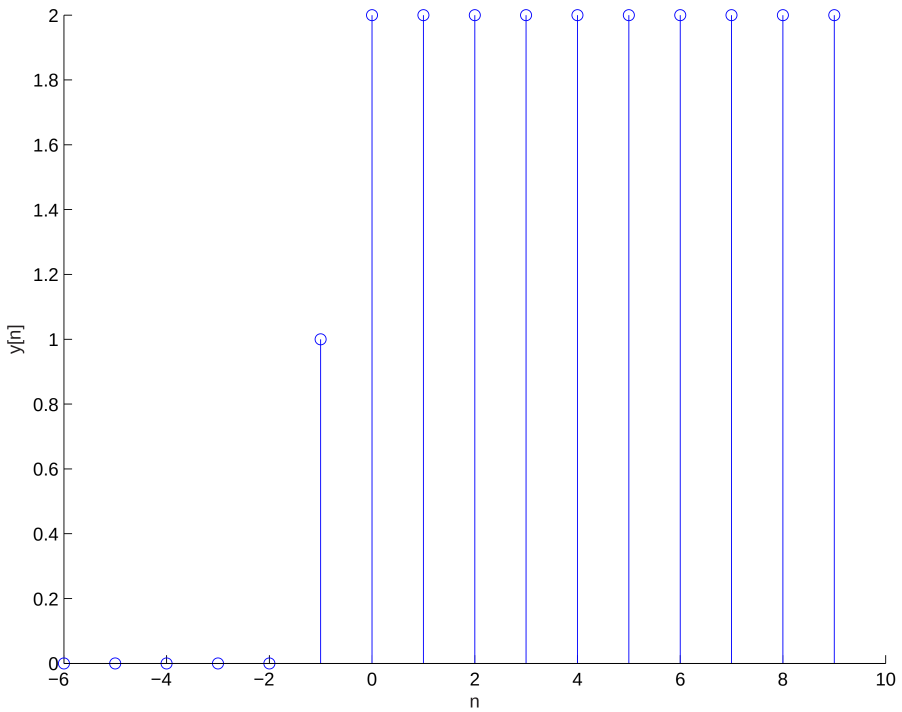
Liður (b)

Dæmi

Kerfið $y[n] = x[n] + x[n+1]$ er ekki orsakatengt. Notum merkið $x[n] = u[n]$ til þess að sýna fram á þetta. Skilgreinum í MATLAB vigrana x og y til þess að tákna innmerki á bilinu $-5 \leq n \leq 9$, og útmerki á bilinu $-6 \leq n \leq 9$.

Lausn

Samkvæmt skilgreiningu á orsakatengdu kerfi er útmerki þess veltur eingöngu á innmerki þess í nútíð og þátíð. Merkið $y[n] = x[n] + x[n+1]$ er ekki orsakatengt þar sem útmerki þess byggist á nútíð + framtíð. Við getum skoðað þetta á grafi:



Mynd 3: Kerfið $y[n] = x[n] + x[n+1]$

Við vitum að merkið $u(t)$ er orsakatengt því það er skilgreint sem

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Af myndinni sjáum við að fallið gefur gildið $y[n] = 1$ í $n = -1$. Samkvæmt skilgreiningunni á $u(t)$ ættum við að fá $y[n] = 0$ fyrir $n < 0$. $y[n] = u[n] + u[n+1]$ er því óorsakatengt.

Intermediate Problems

Í þessum dæmum fáum við kerfi og eiginleika sem það uppfyllir ekki, en verðum að uppgötva á eigin spýtur eitt eða fleiri innmerki sem sýna fram á það. Hér gerum við MATLAB vigra til þess að tákna innmerki og útmerki kerfisins og búum til gröf í samræmi við þessa vigra. Notum síðan gröfin til þess að færa skýr og góð rök fyrir því af hverju kerfið uppfyllir ekki téða eiginleika.

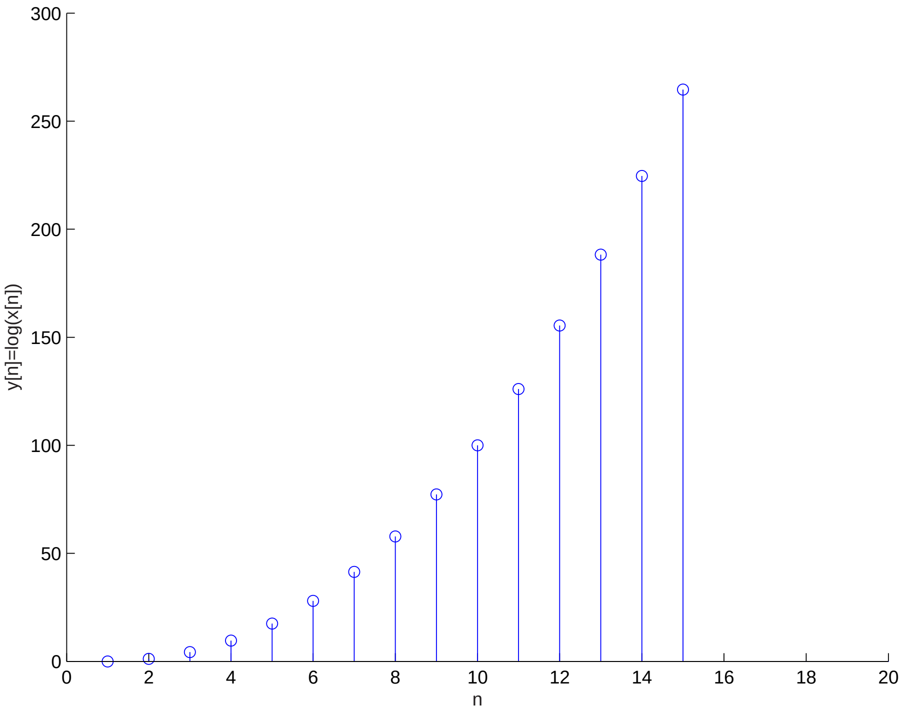
Liður (c)

Dæmi

Kerfið $y[n] = \log(x[n])$ er ekki stöðugt.

Lausn

Það að kerfi sé stöðugt þýðir að þegar innmerkið breytist örlítið breytist útmerkið mikið, t.d. hækkar mjög snöggt og stefnir á ∞. Til þess að sýna að $\log(x[n])$ sé óstöðugt þurfum við að velja innmerki sem hækkar snöggt. Við veljum $n = 1 : 10$ og $x[n] = n^{n^2}$:



Mynd 4: Kerfið $y[n] = \log(x[n])$

Við sjáum að fallið hækkar mjög snöggt og að það þarf ekki mörg n til þess að $y[n]$ stefni á ∞.

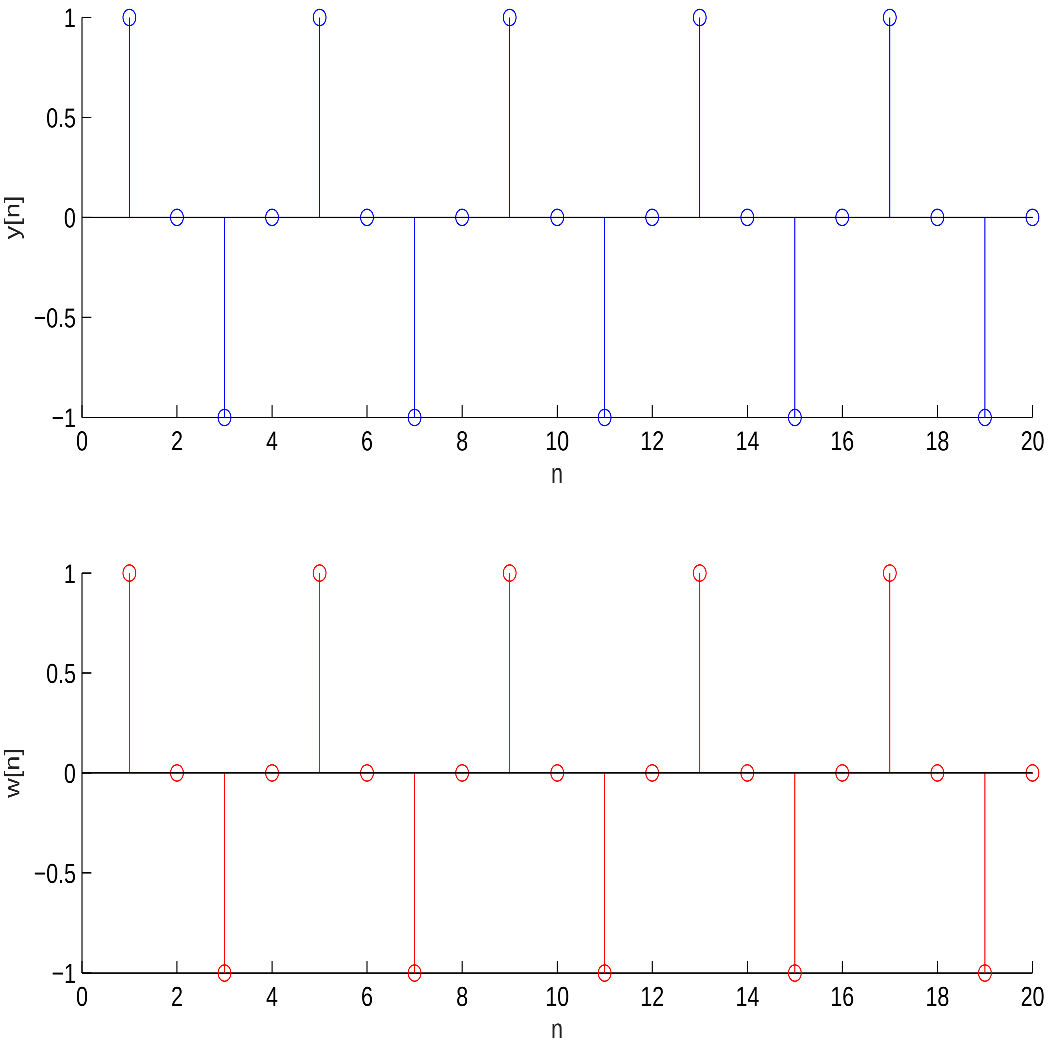
Liður (d)

Dæmi

Kerfið í (a)-lið er ekki andhverfanlegt.

Lausn

Kerfið sem við höfum er $y[n] = \sin((\pi/2)x[n])$. Andhverfa þess er $w[n] = \sin^1(y[n])\frac{2}{\pi}$. Samkvæmt skilgreiningunni á andhverfu ættum við að fá ólík útmerki fyrir sömu innmerki $y[n]$ og $w[n]$. Skoðum þetta á gröfum: Hér eru bæði gröfin nákvæmlega eins sem þýðir að



Mynd 5: Kerfin $y[n] = \sin((\pi/2)x[n])$ og $w[n] = \sin^1(y[n])\frac{2}{\pi}$.

kerfið getur ekki verið andhverfanlegt. Andhverfa merkisins er sú sama og merkið sjálft!

Advanced Problems

Fyrir næstu þrjú kerfi eigum við að athuga hvort þau séu línuleg, tímaóháð, orsakatengd, stöðug og andhverfanleg. Ef þau hafa ekki tiltekinn eiginleika þurfum við að sýna fram á það með dæmum og nota MATLAB til þess að sýna myndrænt hvernig kerfið hefur ekki þessa eiginleika.

Liður (e)

Dæmi

$y[n] = x^3[n]$

Lausn

- **Línulegt:** Nei (sjá útskýringu með gröfum neðar).
- **Tímaóháð:** Já, því $y[n - n_0]$ er útmerki fyrir $x[n - n_0]$ sem innmerki (sjá bls. 51).
- **Orsakatengt:** Já, því útmerki byggir einungis á innmerki í nútíð.
- **Stöðugt:** Já, því útmerkið takmarkast af innmerkinu.
- **Andhverfanlegt:** Já, því hægt er að finna andhverfuna $w[n] = \sqrt[3]{y[n]}$.

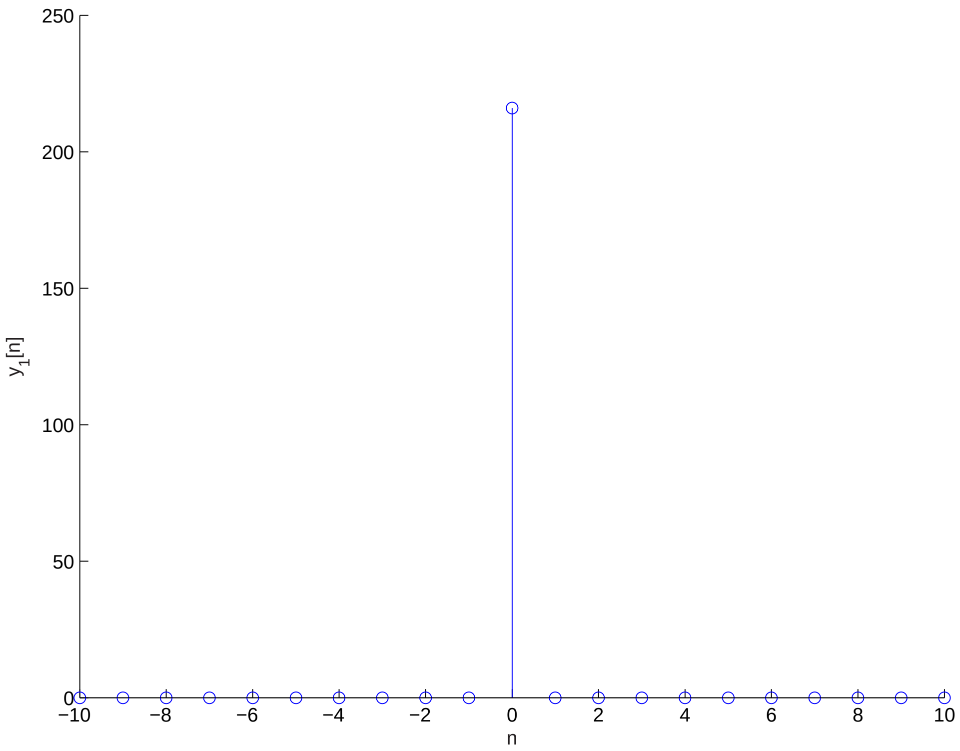
Til þess að athuga hvort kerfið sé línulegt notum við sömu aðferð og áður, þ.e. fyrir innmerkin

$$x_1[n] = \delta[n],$$
$$x_2[n] = 2\delta[n],$$

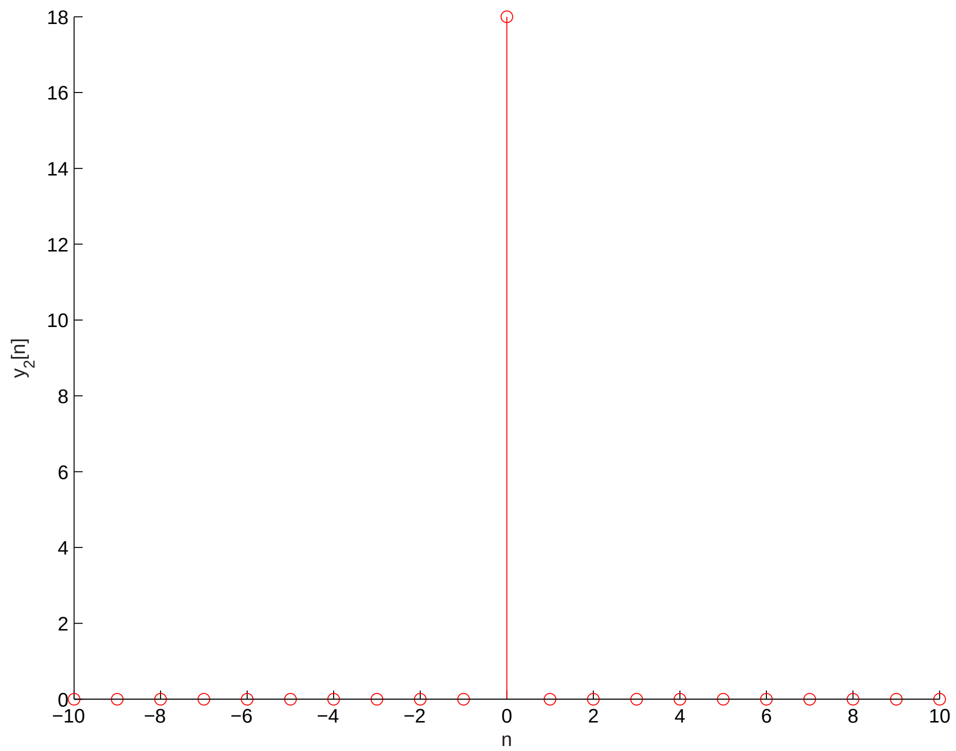
og samsvarandi kerfi $y_1[n]$ og $y_2[n]$ þarf eftirfarandi að vera uppfyllt:

$$y_1[n] = ax_1^3[n] + bx_2^3[n] = (ax_1[n] + bx_2[n])^3 = y_2[n]$$

Við skoðum þetta myndrænt í tveimur gröfum á næstu síðu. Ef þetta kerfi væri línulegt væru þessi gröf nákvæmlega eins. Þau eru það ekki svo við ályktum að kerfið sé ekki línulegt.



Mynd 6: Kerfið $y_1[n] = ax_1^3[n] + bx_2^3[n]$.



Mynd 7: Kerfið $y_2[n] = (ax_1[n] + bx_2[n])^3$.

Liður (f)

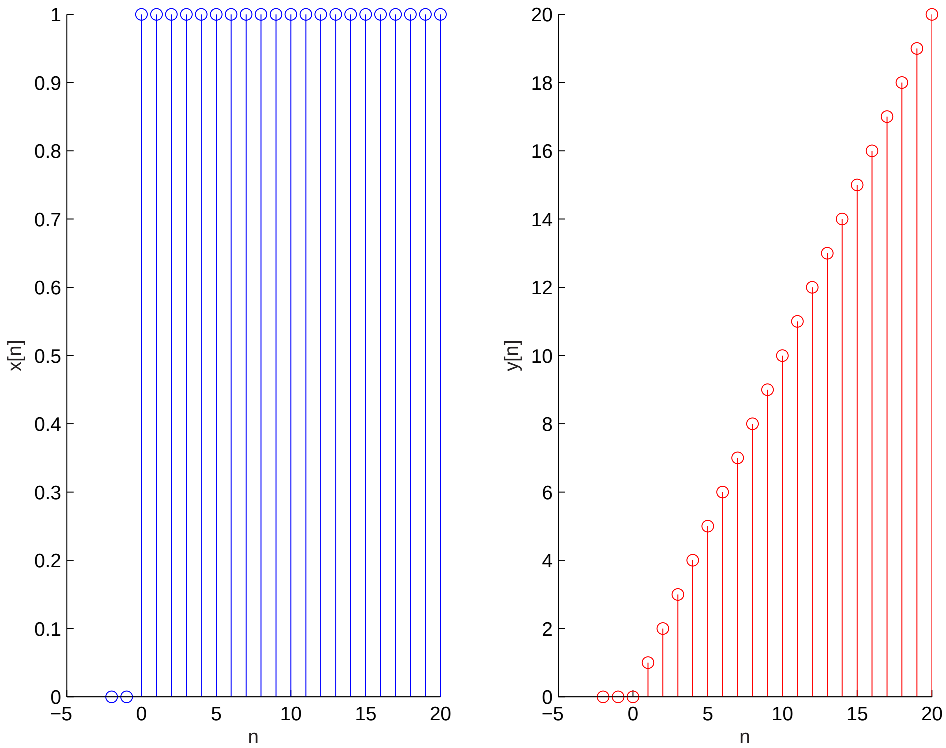
Dæmi

$y[n] = nx[n]$

Lausn

- **Línulegt:** Já, því kerfið uppfyllir skilyrði um línuleg kerfi.
- **Tímaóháð:** Já, því $y[n - n_0]$ er útmerki fyrir $(n - n_0)x[n - n_0]$ sem innmerki (sjá bls. 51).
- **Orsakatengt:** Já, því útmerki byggir einungis á innmerki í nútíð.
- **Stöðugt:** Nei, því þegar $n \to \infty$ gildir að $y \to \infty$, þ.e. útmerkið er ekki takmarkað af innmerkinu (nánar hér að neðan).
- **Andhverfanlegt:** Já, nema í $n = 0$, því andhverfan er $w[n] = \frac{1}{n}y[n]$, $n \neq 0$.

Við getum skoðað hvort kerfið sé stöðugt í MATLAB með því að bera saman annars vegar $x_u[n] = u[n]$ og hins vegar $y[n] = nx_u[n]$. Við sjáum að grafið hægra megin hækkar hratt og stefnir að lokum á ∞.



Mynd 8: Kerfin $x[n] = u[n]$ og $y[n] = nx[n]$ borin saman.

Liður (g)

Dæmi

$y[n] = x[2n]$

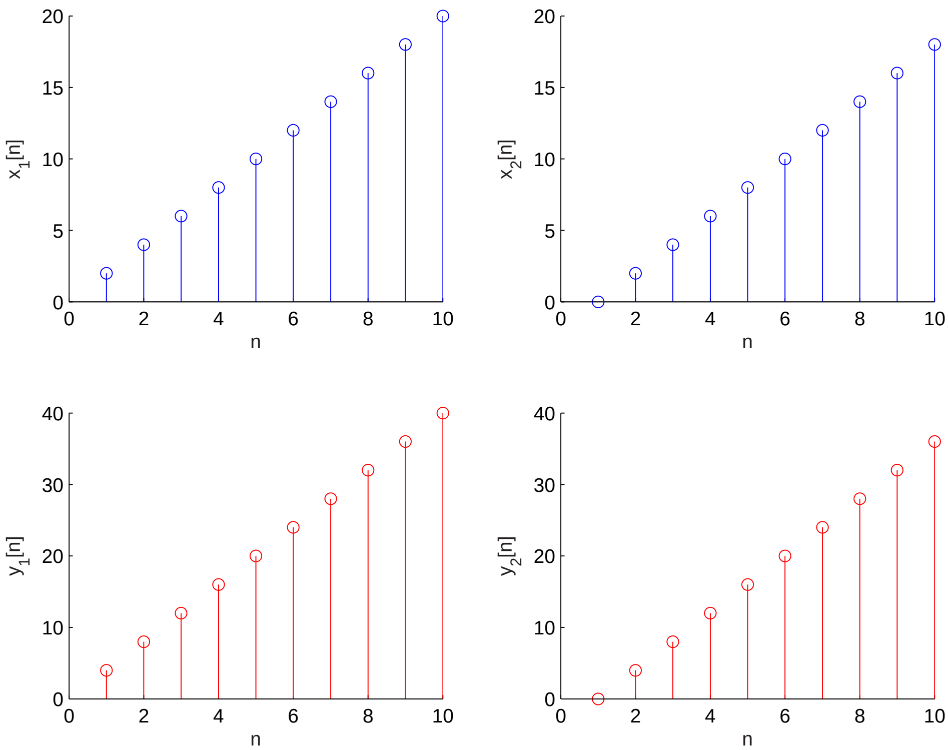
Lausn

- **Línulegt:** Já, því kerfið uppfyllir skilyrði um línuleg kerfi.
- **Tímaóháð:** Nei, sjá útskýringu hér fyrir neðan.
- **Orsakatengt:** Já, því útmerki byggir einungis á innmerki í nútíð.
- **Stöðugt:** Já, því útmerkið er takmarkað af innmerkinu.
- **Andhverfanlegt:** Já, andhverfa þess er $w[n] = y[\frac{1}{2}n]$.

Skilyrðin fyrir því að kerfi sé tímaóháð eru þau að $y[n-n_0] = x[n-n_0]$. Í þessu tilfelli er

$$y[n-n_0] = x[2(n-n_0)] = x[2n-2n_0]$$

sem brýtur gegn skilyrðinu okkar. Kerfið er því tímaháð. Prófum að velja innmerkið $x_1[n] = 2n$. Þá er útmerkið $y_1[n] = 2(2n) = 4n$. Prófum líka hliðrun. Þá er $x_2[n] = 2(n-1) = 2n-2$ og $y_2[n] = 2(2n-2) = 4n-4$. Skoðum þetta myndrænt með MATLAB:



Mynd 9: Samanburður á innmerkjunum $x_1[n]$ og $y_1[n]$ annars vegar og $x_2[n]$ og $y_2[n]$ hins vegar.

Kafli 1.5 Implementing a First-Order Difference Equation

Stakræn kerfi eru oft útfærð sem línulegar mismunajöfnur með fastastuðlum. Tvær einfaldar mismunajöfnur eru fyrsta stigs *moving average* og fyrsta stigs *auto-regression* jöfnurnar:

$$y[n] = x[n] + bx[n-1] \tag{1.5}$$
$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \tag{1.6}$$

Advanced Problems

Liður (a)

Dæmi

Við eigum að búa til fallið `y=diffeqn(a,x,yn1)` sem reiknar útmerki orsakatengda kerfisins sem sýnt er með jöfnu (1.6). Innmerkisvigurinn `x` inniheldur $x[n]$ fyrir $0 \leq n \leq N-1$ og `yn1` gefur gildið á $y[-1]$. Úttaksvigurinn `y` inniheldur $y[n]$ fyrir $0 \leq n \leq N-1$. Fyrsta lína M-skránnar ætti að vera `function y=diffeqn(a,x,yn1)`.

Lausn

Sjá viðaukann *MATLAB kóðar*

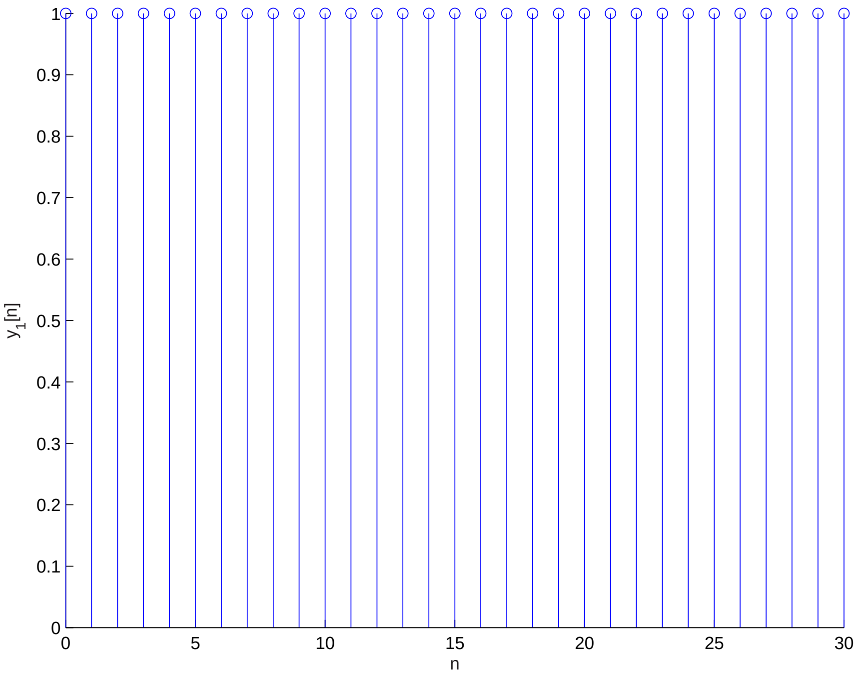
Liður (b)

Dæmi

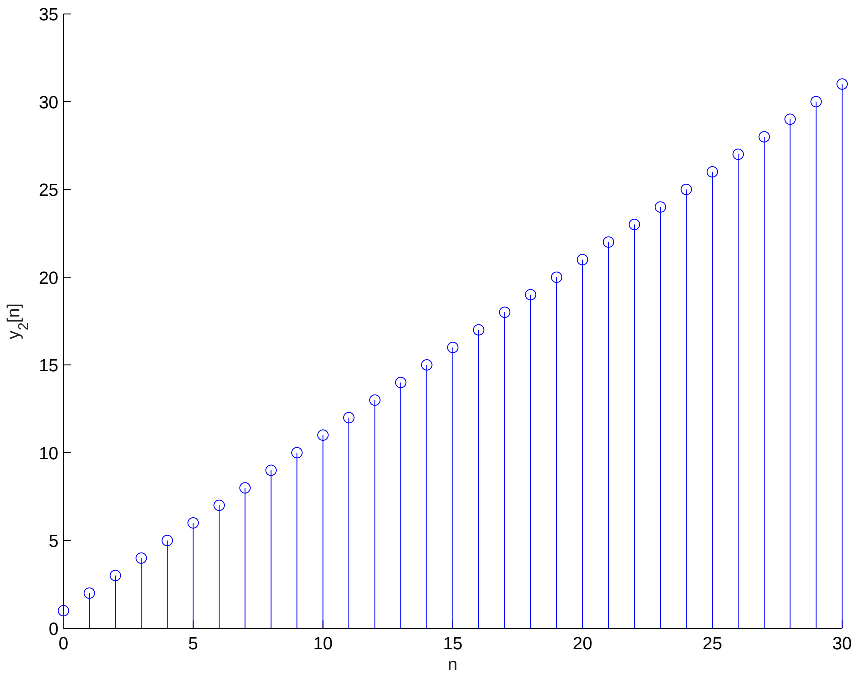
Gerum ráð fyrir að $a = 1$, $y[-1] = 0$, og að við höfum bara áhuga á úttaki á tímabilinu $0 \leq n \leq 30$. Notum fallið `diffeqn` til þess að reikna svörun vegna $x_1[n] = \delta[n]$ og $x_2[n] = u[n]$, einingarimpúlsins og einingarþrepafallsins. Teiknum gröf fyrir hvora svörun fyrir sig með `stem`.

Lausn

Fyrir nánari lausn, sjá viðaukann *MATLAB kóðar*. Gröfin koma hér að neðan:



Mynd 10: Merkið $y_1[n]$ fyrir $x[n] = \delta[n]$.



Mynd 11: Merkið $y_2[n]$ fyrir $x[n] = u[n]$.

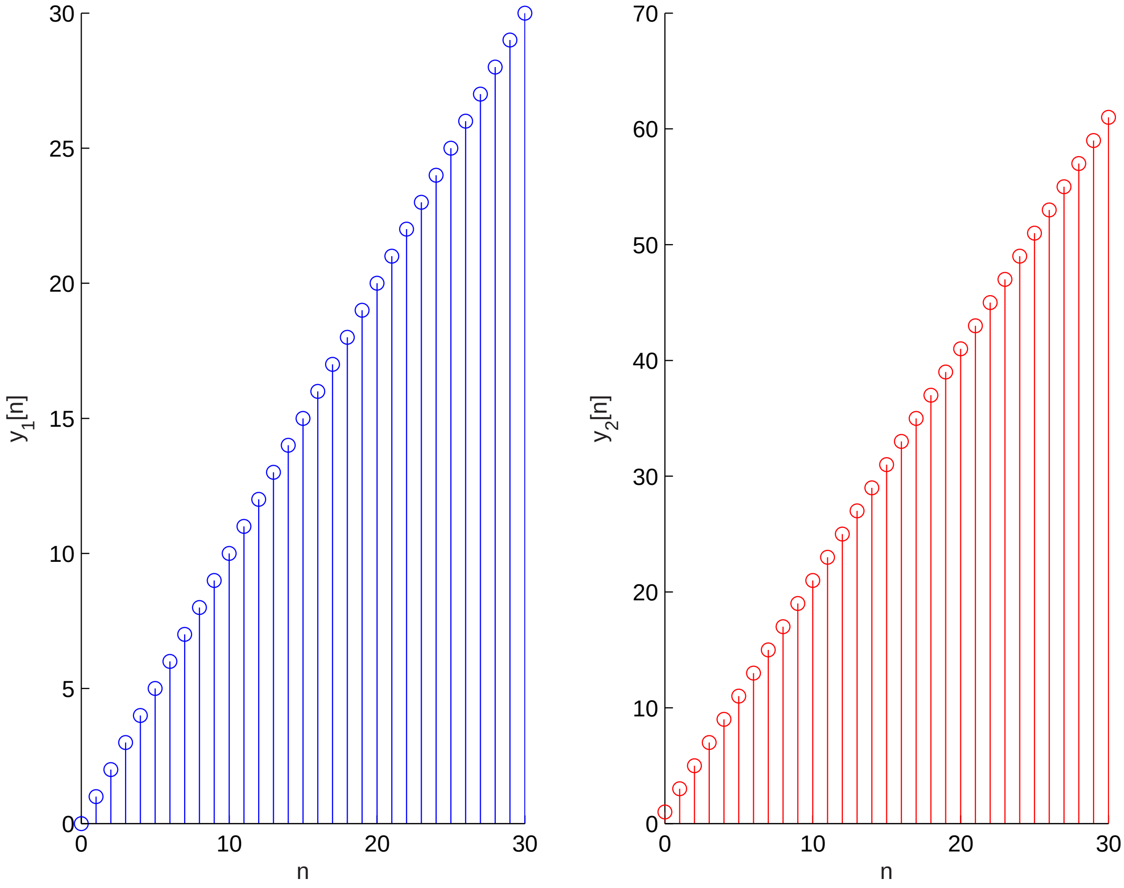
Liður (c)

Dæmi

Nú er $a = 1$ sem áður en $y[-1] = -1$. Notum fallið okkar til að reikna $y[n]$ fyrir $0 \leq n \leq 30$ þegar innmerkin eru $x_1[n] = u[n]$ og $x_2[n] = 2u[n]$. Skilgreinum samsvarandi útmerki kerfanna sem $y_1[n]$ og $y_2[n]$. Notum `stem` til að teikna $(2y_1[n] - y_2[n])$. Þar sem sem jafna (1.6) er línuleg mismunajafna, af hverju er þessi mismunur ekki núll?

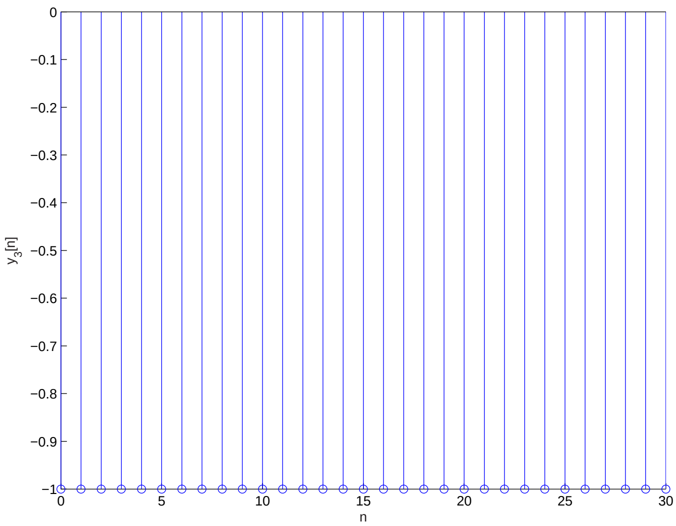
Lausn

Byrjum á að teikna upp merkin $y_1[n]$ og $y_2[n]$:



Mynd 12: Merkin $y_1[n]$ fyrir $x_1[n] = u[n]$ og $y_2[n]$ fyrir $x_2[n] = 2u[n]$.

Svo teiknum við mismuninn $y_3[n] = 2y_1[n] - y_2[n]$:



Mynd 13: Merkið $y_3[n] = 2y_1[n] - y_2[n]$.

Við sjáum greinilega að mismunurinn er ekki núll. Við getum skoðað hvernig fallið hegðar sér fyrir $n = 0$:

$$\begin{aligned} y_1[0] &= ay_1[-1] + x_1[0] \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

en nú er

$$\begin{aligned} y_2[0] &= ay_2[-1] + x_2[0] \\ &= -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

og því fáum við

$$y_3[0] = 2 * y_1[0] - y_2[0] = -1.$$

Fallið hegðar sér eins fyrir öll n og þetta útskýrir hvers vegna við fáum grafið á mynd 13.

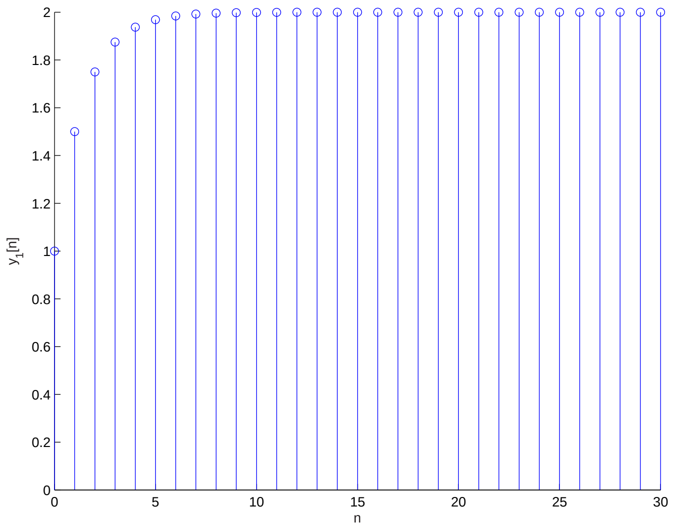
Liður (d)

Dæmi

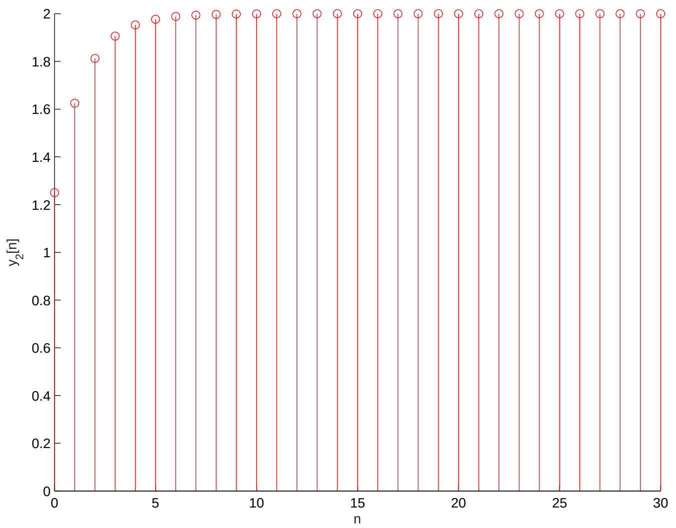
Orsakatengda kerfið sem er lýst með jöfnu (1.6) er kallað BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) stöðugt hvenær sem $|a| < 1$. Einn eiginleiki slíkra stöðugra kerfa er sá að áhrif upphafsskilyrðanna verður óvera fyrir nógu stór n.
Nú gerum við ráð fyrir að $a = 1/2$ og að $\mathbf{x}$ innihaldi $x[n] = u[n]$ fyrir $0 \leq n \leq 30$. Fyrir bæði $y[-1] = 0$ og $y[-1] = 1/2$ eigum við að reikna útmerkin tvö fyrir $0 \leq n \leq 30$. Hver er munurinn?

Lausn

Við teiknum upp merkin tvö:

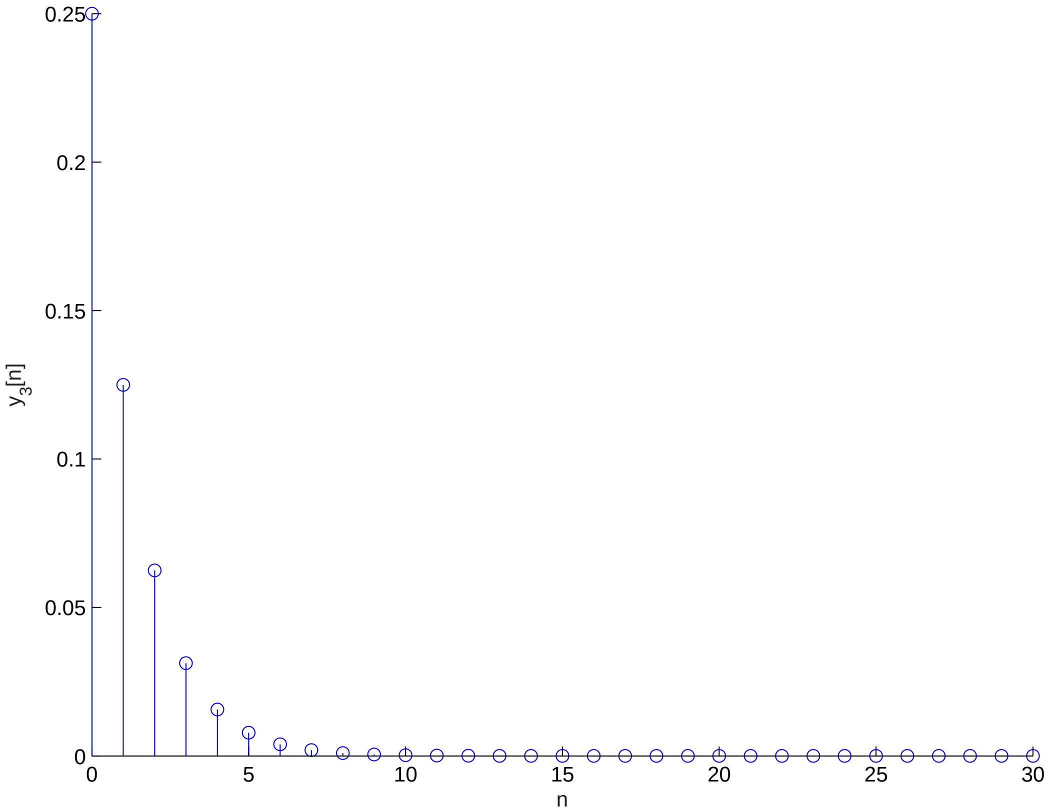


Mynd 14: Merkið $y_1[n]$ fyrir $x_1[n] = u[n]$, $a = 1/2$ og $y[-1] = 0$.



Mynd 15: Merkið $y_2[n]$ fyrir $x_2[n] = u[n]$, $a = 1/2$ og $y[-1] = 1/2$.

Teiknum svo upp mismunamerkið $y_3[n] = y_2[n] - y_1[n]$ til þess að kanna hver mismunur merkjanna sé:



Mynd 16: Merkið $y_3[n] = y_2[n] - y_1[n]$.

Við sjáum að í fyrstu hafa upphafsskilyrði áhrif á mismun fallanna en eftir því sem n stækkar þá verða þau áhrif óvera, eins og lýsing BIBO-stöðugra merkja segir til um!

MATLAB kóðar

Kafli 1.4

```
%MOK - Reikniverkefni II
%Kafli 1.4
%Saevar Ofjord Magnusson
%Skra: kafli_1_4.m

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% a lidur
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

n = -10:10;
x1 = delta(n);
x2 = 2.*delta(n);
y1 = sin((pi/2)*x1);
y2 = sin((pi/2)*x2);

figure(1);
subplot(1,2,1);
stem(n,y1);
xlabel('n');
ylabel('y_1[n]');
subplot(1,2,2);
stem(n,y2,'r');
xlabel('n');
ylabel('y_2[n]');

print -depsc kafli_1_4_a1

% setjum einhverja fasta a og b
a=-1;b=3;

% buum til tvo merki sem eiga ad gefa somu utkomu ef merkin eru linuleg
y3 = sin((pi/2)*(a*x1+b*x2));
y4 = (a*y1)+(b*y2);

figure(2);
subplot(1,2,1);
stem(n,y2);
xlabel('n');
ylabel('y_3[n]');
subplot(1,2,2);
stem(n,y4,'r');
xlabel('n');
ylabel('y_4[n]');

print -depsc kafli_1_4_a2

```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% b lidur
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

n = -6:9;
x1 = unit(n);
x2 = unit(n+1);
y1 = x1 + x2;

figure(3);
stem(n,y1);
xlabel('n');
ylabel('y[n]');

print -depsc kafli_1_4_b

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% c lidur
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

figure(4);

n = 1:20;
x = n.^(n.^2);
y = log10(x);
stem(n,y);
xlabel('n');
ylabel('y[n]=log(x[n])');

print -depsc kafli_1_4_c

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% d lidur
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

figure(5);
x = 1:20;
y = sin((pi/2)*x);
w = asin(y)*(2/pi);

subplot(2,1,1);
stem(n,y);
xlabel('n');
ylabel('y[n]');

subplot(2,1,2);
stem(n,w,'r');
xlabel('n');
ylabel('w[n]');
```

```
print -depsc kafli_1_4_d

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% e lidur
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% linulegt?

a=2;b=2;

n = -10:10;

x1 = delta(n);
x2 = 2.*delta(n);
y1 = (a*x1+b*x2).^3;
y2 = a*x1.^3+b*x2.^3;

figure(6);
stem(n,y1);
xlabel('n');
ylabel('y_1[n]');
print -depsc kafli_1_4_e1

stem(n,y2,'r');
xlabel('n');
ylabel('y_2[n]');
print -depsc kafli_1_4_e2

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% f lidur
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% stodugt?

n = -2:20;

x = unit(n);
y = n.*x;

figure(7);
subplot(1,2,1);
stem(n,x);
xlabel('n');
ylabel('x[n]');

subplot(1,2,2);
stem(n,y,'r');
xlabel('n');
ylabel('y[n]');
print -depsc kafli_1_4_f
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% g lidur
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% timaohad?

n = 1:10;
x1 = 2*n;
x2 = 2*n -2;

y1 = 4*n;
y2 = 4*n -4;

figure(8);
subplot(2,2,1);
stem(n,x1);
xlabel('n');
ylabel('x_1[n]');
subplot(2,2,2);
stem(n,x2);
xlabel('n');
ylabel('x_2[n]');
subplot(2,2,3);
stem(n,y1,'r');
xlabel('n');
ylabel('y_1[n]');
subplot(2,2,4);
stem(n,y2,'r');
xlabel('n');
ylabel('y_2[n]');
print -depsc kafli_1_4_g
```

Kafli 1.5

```
%MOK - Reikniverkefni II
%Kafli 1.5
%Saevar Ofjord Magnusson
%Skra: diffeqn.m

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% b lidur
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

n = 0:30;

x1 = delta(n);
x2 = unit(n);

% gefnir fastar
a=1;
```

```
yn1=0;

y1=diffeqn(a,x1,yn1);
y2=diffeqn(a,x2,yn1);

figure(1);
stem(n,y1);
xlabel('n');
ylabel('y_1[n]');

print -depsc kafli_1_5_b1

stem(n,y2);
xlabel('n');
ylabel('y_2[n]');

print -depsc kafli_1_5_b2

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% c lidur
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

a=1;yn1=-1;
n= 0:30;

x1 = unit(n);
x2 = 2*unit(n);

y1 = diffeqn(a,x1,yn1);
y2 = diffeqn(a,x2,yn1);

figure(2);
subplot(1,2,1);
stem(n,y1);
xlabel('n');
ylabel('y_1[n]');

subplot(1,2,2);
stem(n,y2,'r');
xlabel('n');
ylabel('y_2[n]');

print -depsc kafli_1_5_c1

% mismunurinn
y3 = (2*y1 - y2);

figure(3);
stem(n,y3);
xlabel('n');
```

```
ylabel('y_3[n]');

print -depsc kafli_1_5_c2

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% d lidur
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

n=0:30;
x=unit(n);
a=0.5;
yn1=0;
yn2=0.5;

y1=diffeqn(a,x,yn1);
y2=diffeqn(a,x,yn2);

figure(4);
stem(n,y1);
xlabel('n');
ylabel('y_1[n]');

print -depsc kafli_1_5_d1

figure(5);
stem(n,y2,'r');
xlabel('n');
ylabel('y_2[n]');

print -depsc kafli_1_5_d2

y3 = y2-y1;
figure(5);
stem(n,y3);
xlabel('n');
ylabel('y_3[n]');

print -depsc kafli_1_5_d3
```

Fallið diffeqn(a,x,yn1)

```
%MOK - Reikniverkefni II
%Kafli 1.5
%Saevar Ofjord Magnusson
%Skra: diffeqn.m

function y = diffeqn(a,x,yn1)
   for i=1:length(x)
      if(i==1)
         y(i)=a*yn1+x(i);
```

```
      else
         y(i)=a*y(i-1)+x(i);
      end
   end
end
```

Fallið $\delta(t)$

```
% delta.m
% fallid delta(n)

function [x] = delta(n)

sizeofn = size(n);

for i=1:sizeofn(2)
   if(n(i)==0)
      x(i)=1;
   else
      x(i)=0;
   end
end
```

Fallið $u(t)$

```
% unit.m
% fallid unit(n)

function [x] = unit(n)

sizeofn=size(n);

for i=1:sizeofn(2)
   if(n(i)<0)
      x(i)=0;
   else
      x(i)=1;
   end
end
```