Pendúll

Sævar Öfjörð Magnússon

Nóvember 2004

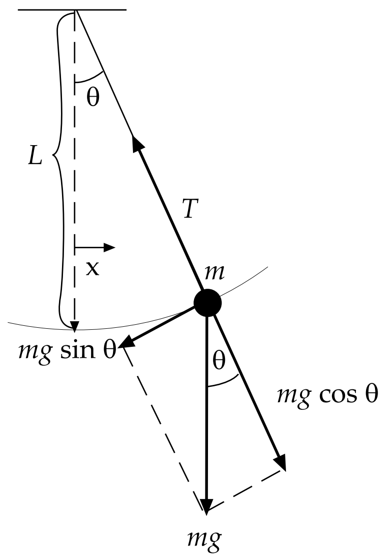
Efnisyfirlit

1 Inngangur

Einfaldur pendúll er hugtak sem notað er yfir massa sem hangir í bandi eða álíka. Þegar honum er lyft til hliðar þannig að hann myndi ákveðið útslagshorn við lóðlínu og sleppt, sveiflast hann um lóðlínuna. Þessari hreyfingu má lýsa stærðfræðilega sem einfaldri sveifluhreyfingu (*e. simple harmonic motion*) þar sem stöðuorkan neðst í boga er næstum jöfn færslunni í öðru veldi. Í raun og veru stenst þetta líkan ekki fullkomlega, raunverulegur pendúll tapar orku þegar hann sveiflast.
Það var Galileo sem uppgötvaði fyrst að sveiflutími pendúls er einungis háður lengd pendúlsins, ekki massanum. Áður hafði verið talið að því meiri sem massinn væri, því lengri tíma tæki sveiflan. [Wikipedia]
Í þessari tilraun athugum við einfalt líkan fyrir pendúl, og sjáum að það mun bregðast. Þá skoðum við hvenær frávik eru orðin veruleg og endurbætum líkanið okkar í samræmi við það. Einnig verður lagt mat á hversu nákvæmt líkanið þarf að vera.

2 Fræði

2.1 Einfaldur pendúll



Mynd 1: *Einfaldur pendúll*

Mynd 1 sýnir einfaldan pendúl. Gerum ráð fyrir að m sé punktmassi og að bandið sé massalaust og óteygjanlegt. Massinn hefur sveiflast boglengdina s, myndar hornið θ við lóðrétta ásinn og hangir í bandi sem hefur lengd L. Myndin sýnir einnig alla þá krafta sem verka á lóðið. Við munum notast við $mg\sin\theta$ og þar sem sá kraftur er í gagnstæðri stefnu við útslagið setjum við neikvætt formerki við hann. 2. lögmál Newtons gefur okkur þá

$$-mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2} \tag{1}$$

Við umritum jöfnuna og fáum

$$\frac{d^2s}{dt^2} + g\sin\theta = 0 \tag{2}$$

Þar sem $s = L\theta$ fáum við

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g\sin\theta}{L} = 0 \tag{3}$$

Við gerum ráð fyrir að hornið θ verði ávallt það lítið að segja megi $\sin\theta \approx \theta$ og þá fáum við jöfnuna

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g\theta}{L} = 0 \tag{4}$$

Einföld lausn á þessari jöfnu er

$$\theta = \Theta\cos(\omega t) \tag{5}$$

þar sem $\omega^2 = \frac{g}{L}$ og er því sveiflutíminn

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{6}$$

Θ er hámarksútslag pendúlsins. Við munum sjá að þetta líkan mun bregðast. Þegar Θ stækkar og verður t.d. allt að 40° munu okkar mælingar verða of nákvæmar og ekki falla að líkaninu sem er nálgun. Því reynum við að endurbæta líkanið.

2.2 Endurbætt líkan

Jöfnu (3) (án nálgunar) er ekki hægt að leysa beint og fá lausn á sama hátt og í (6). Með öðrum orðum, við fáum bara óendanlega langa röð. Hins vegar má finna nálgunarlausn sem gefur tíma einnar sveiflu sem er háður hámarksútslaginu Θ:

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\Theta} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\Theta)}} \tag{7}$$

Þegar heildið er leyst (Sjá nánar í [Geirfinnur Jónsson, bls 9]) kemur í ljós að lausnin er óendanleg röð. Við sýnum aðeins fyrstu þrjá liðina hér:

$$T = T_0(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\Theta}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\Theta}{2}) \tag{8}$$

Þar sem $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Takið eftir að fyrsti liðurinn er klassíska líkanið fyrir einfaldan pendúl (6). Til þess að kanna hversu margir liðir eru nauðsynlegir til þess að fá nothæft líkan má setja inn stórt útslag, t.d. $\Theta = 60°$. Þá verður þriðji liðurinn alltaf minni en 1% af fyrsta liðnum. Við gerum ráð fyrir að skekkja í mælingum sé meiri en sú skekkja sem myndast við að nota aðeins tvo fyrstu liðina og fáum því

$$T_\Theta = T_0(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\Theta}{2}) \tag{9}$$

En þetta líkan munum við nota til þess að bera saman við mælingarnar. Með einfaldri umritun á (9) fæst

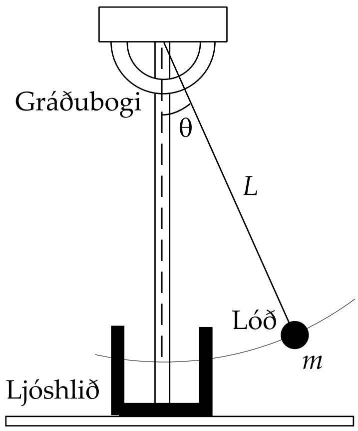
$$T_\Theta = T_0 + \frac{T_0}{4}(\sin^2\frac{\Theta}{2}) \tag{10}$$

en hér er T_Θ línulegt fall af stærðinni $\sin^2\Theta/2$. Samræmist mælingar okkar þessu líkani ættu þær að falla á línu með skurðpunkt við T ásinn í T_0 og með hallatölu $\frac{T_0}{4}$.

3 Tæki

Við framkvæmd tilraunarinnar notuðum við stand sem hægt var að hengja lóð í. Efst á standinn var festur gráðubogi sem nam við þann punkt sem pendúllinn sveiflaðist um. Neðst var síðan ljóshlið tengt við *Science First* tímamæli. Við stilltum það þannig af að ljóshliðið væri nokkurn veginn á jafnvægspunkti pendúlsins (0°). Þegar pendúllinn sveiflaðist rauf hann ljósgeislann í miðstöðunni og tímamælirinn skráði tímann. Við notuðum einnig önnur hefðbundin mælitæki, svo sem skeiðklukku og málband.

4 Framkvæmd



Mynd 2: *Uppsetning Tækja*

Tækjum var stillt upp samkvæmt *mynd 2*. Athugið að kaflaheiti í kaflanum *Framkvæmd* vísa til samsvarandi kaflaheita í kaflanum *Niðurstöður* þar sem niðurstöður hvers hluta eru kynntar, þrátt fyrir að númeraröð sé e.t.v. ekki sú sama.

4.1 Mæling með skeiðklukku

Áður en mælingar hófust mældum við lengd pendúlsins og reiknuðum væntanlegan sveiflutíma T_0 samkvæmt (6).
Mældir voru mismunandi sveiflutímar með skeiðklukku fyrir $\theta = 5^\circ, 20^\circ$ og 30°. Þá tókum við líka mismunandi margar sveiflur fyrir hverja stærð á θ, 10, 25 og 50 sveiflur.

4.2 Mæling með ljóshliði og tímamæli

Nú var sveiflutíminn mældur með *Science First* tímamælinum og ljóshliðinu. Mældur var tími fyrir $\theta = 5^\circ - 40^\circ$ með 5° millibili. Að lokum voru mæligögnin borin saman við líkanið.

5 Niðurstöður

Hér vísa kaflaheitin til samsvarandi kaflaheita í kaflanum *Framkvæmd* eins og áður sagði.

5.1 Mæling með skeiðklukku

Niðurstöður mælinga með skeiðklukku eru settar fram í *töflu 1.* Þar er búið að sameina margar mælingar í meðaltal þeirra allra.

Tafla 1: *Mælistærðir fyrir fyrri hluta tilraunar.*

Útslag	Sveiflutími [s]
$5°$	$1,343 \pm 0,02$
$20°$	$1,353 \pm 0,02$
$30°$	$1,368 \pm 0,02$

Reiknaður sveiflutími T_0 samkvæmt (6) er

$$T_0 = 1,34 \pm 0,002s$$

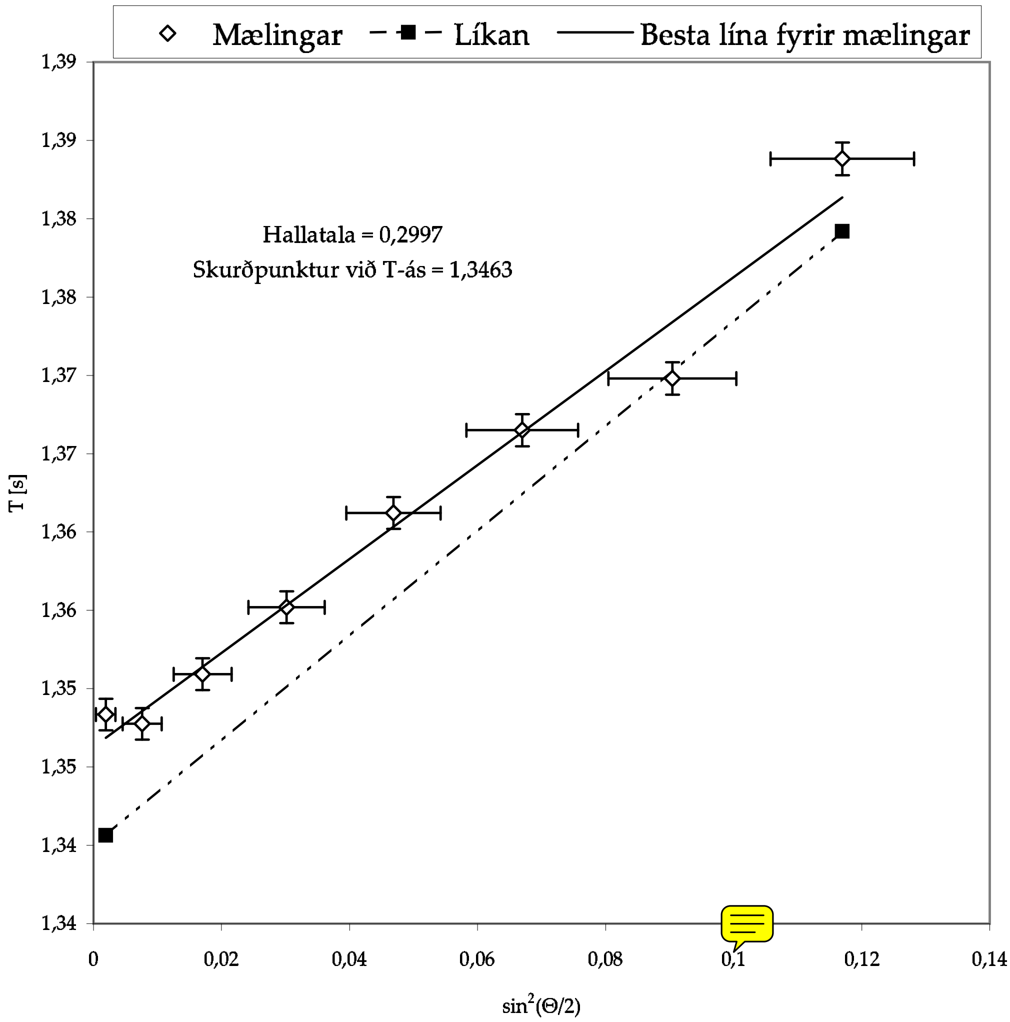
Þar sem $L = 44,7 \pm 0,1cm$. Við athugun á töflunni sést að sveiflutíminn virðist lengjast eftir því sem hornið stækkar. Við sjáum einnig að með því að bera saman reiknaðan sveiflutíma við mældu gildin lenda þau öll innan óvissumarka. Það þýðir að við þurfum á nákvæmari mælingum að halda til þess að ákvarða hvert samband hornsins og sveiflutímans er.

5.2 Mæling með ljóshliði og tímamæli

Við notum (10) til þess að teikna upp graf (sjá *mynd 3*) af sveiflutíma T sem fall af $\sin^2 \frac{\Theta}{2}$. Á þetta graf setjum við einnig línu sem táknar líkanið okkar til samanburðar.
Hallatala grafsins verður $\frac{T_0}{4}$ og skurðpunktur við T-ás T_0. Við notum línu minnstu kvaðratfrávika til þess að finna nálgun á hallatölu mælinganna. Sú hallatala er $0,2997 \pm 0,04\frac{s}{4}$ svo sveiflutíminn samkvæmt hallatölu er $1,20 \pm 0,16s$. Önnur leið til að finna T_0 er að reikna skurðpunkt grafsins við T-ás. Skurðpunkturinn á grafinu er $1,35 \pm 0,04$.

6 Lokaorð

Sú fullyrðing sem sett var fram í byrjun um einfalda líkanið stóðst nokkuð örugglega. Það er ekki hægt að segja með fullri vissu að líkanið sé



Mynd 3: *Graf sveiflutíma sem fall af* $\sin^2 \frac{\Theta}{2}$

nægilega nákvæmt þar sem skekkjumörk skarast mikið. Þegar við hins vegar lítum á niðurstöður endurbætta líkansins sjáum við glögglega á *mynd 3* að flestallir punktarnir okkar og/eða skekkjumörk þeira lenda á línu. Ef hins vegar farið er út í smáatriði sjáum við að síðustu tveir punktar virðast heldur ónákvæmir miðað við hina. Þannig má leiða líkum að því að þriðji liður í (8) sé hugsanlega nauðsynlegur þar sem 1% af litlum hornum er tiltölulega lítil breyting en sama prósenta af stærri hornum gæti haft meiri áhrif þegar ofar er komið. Í velflestum mælingum sem unnar eru af nógu mikilli nákvæmni er þó sennilega nóg að nota aðeins tvo liði.

Orsök þess að síðustu tveir punktarnir á grafinu lenda fyrir utan línuna okkar má sennilega rekja til erfiðleikanna við að mæla stór horn. Þegar þau eru mæld er útslagið það mikið að erfitt verður að hafa stjórn á því hvort pendúllinn fer að sveiflast í hringi. Þegar hann byrjar að gera það myndast núningur við standinn sem hann er festur á. Auk þess myndast ákveðin skekkja vegna þess að bandið sem lóðið hangir í er leitt gegnum lítið gat á standinum. Gatið er þó það stórt að það myndast færsla um u.þ.b. $1mm$ við upphafspunkt bandsins sem mælt er út frá.
Burtséð frá þessum þáttum eru mannlegir þættir stærstu óvissuvaldar. Enda byggist nákvæmni mælinga ávallt á nákvæmni mælingamannsins. Auðvitað má reyna eftir fremsta megni að útiloka slíka óvissu með endurtekningum og tvöföldum álestri svo dæmi séu nefnd, en þá er verkið farið að taka lengri tíma á móti. Þá þarf að meta hvoru leitað sé eftir, nákvæmni eða nýtni. Yfirleitt er niðurstaðan sú að farsælast er að notast við blöndu beggja þátta.

24. nóvember, 2004.

Sævar Öfjörð Magnússon

Heimildir

[Young & Freedman] Young, Hugh D.; Freedman, Roger A. 2004. *University Physics with modern physics, 11th Edition.* Addison Wesley. San Fransisco, BNA.

[Geirfinnur Jónsson] Geirfinnur Jónsson, Ari Ólafsson, Magnús Tumi Guðmundsson. 2004. *Vinnuseðlar í eðlisfræði I*. Háskóli Íslands, Raunvísindadeild. Reykjavík.

[Wikipedia] [Höfundur ókunnur]. Heimsótt 23.11.2004. *Pendulum*. [http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum]. Wikipedia, frjálsa alfræðiorðabókin.